

**Bài 1(3.0 điểm)**

Giải phương trình :  $6\sqrt{4x-3}-15=x(x-2)$ .

**Bài 2(3.0 điểm)**

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^4 + 2007 = xyzt \\ y^4 + 2009 = xyzt \\ z^4 - 2005 = xyzt \\ t^4 - 2011 = xyzt \end{cases}$$

**Bài 3(3.0 điểm)**

Cho các số  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$  thỏa mãn điều kiện :  $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_9$ . Chứng minh rằng :

$$\frac{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_6} + \sqrt{a_9}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \sqrt{a_4} + \dots + \sqrt{a_9}} > 0,33.$$

**Bài 4(3.5 điểm)**

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a; b) sao cho  $\frac{a^2-2}{ab+2}$  là số nguyên.

**Bài 5(4.5 điểm)**

Cho tam giác ABC cân tại C. Biết rằng  $\frac{AC}{AB} = k$  ( $k \neq 1$ ). Các đường phân giác trong của tam giác cắt các cạnh AB, BC và CA lần lượt tại M, N và P. Đặt S, S' lần lượt là diện tích các tam giác ABC, MNP. Chứng minh rằng :  $\frac{S}{S'} = \left( \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2$ .

**Bài 6(3.0 điểm)**

Trong một tam giác đều cạnh a, người ta lấy tùy ý 5 điểm. Chứng minh rằng luôn tồn tại ít nhất một cặp điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn  $\frac{a}{2}$ .

----- HẾT -----

Đề thi này có 01 trang;  
Giám thị không giải thích gì thêm.

SBD : ...../ Phòng : .....

Giám thị 1 : .....

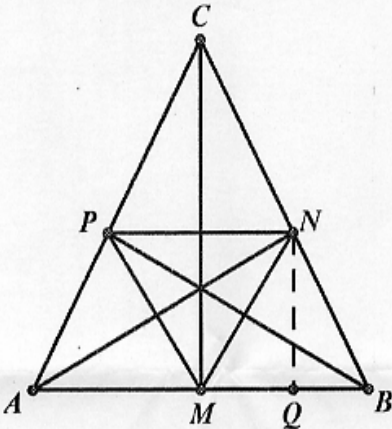
Giám thị 2 : .....

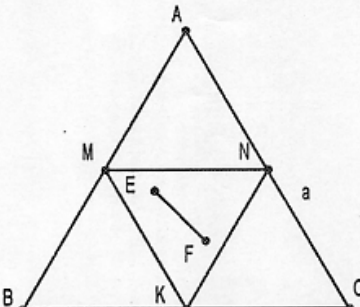
**A. Hướng dẫn chung :**

1. Hướng dẫn chấm gồm có 03 trang;
2. Mọi cách giải đúng đều cho điểm tối đa phần tương ứng;
3. Bài 5 và 6 học sinh không vẽ hình thì không chấm;
4. Điểm toàn bài không làm tròn.

**B. Đáp án và thang điểm :**

Bài	Đáp án	Điểm
1	Giải phương trình : $6\sqrt{4x-3}-15=x(x-2)$	3điểm
	Điều kiện : $x \geq \frac{4}{3}$	0.5
	Ta có : $6\sqrt{4x-3}-15=x(x-2) \Leftrightarrow (4x-3-6\sqrt{4x-3}+9)+(x^2-6x+9)=0$	0.5
	$\Leftrightarrow (\sqrt{4x-3}-3)^2+(x-3)^2=0$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x-3}-3=0 \\ x-3=0 \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow x=3$	0.5
	So lại điều kiện thấy thỏa, vậy $x=3$ là nghiệm.	0.5
2	Giải hệ phương trình	3điểm
	Cộng 4 phương trình của hệ về theo về ta có : $x^4+y^4+z^4+t^4=4xyzt$	0.5
	$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2+(z^2-t^2)^2+2(xy-zt)^2=0$	0.5
	$\Leftrightarrow x^2-y^2=z^2-t^2=xy-zt=0$	0.5
	Vậy : $x^2=y^2; z^2=t^2; xy=zt$	0.5
	Khi đó kết hợp với $z^4-2005=t^4-2011 \Rightarrow 2005=2011$ : Vô lý	0.5
	Do đó : Hệ phương trình vô nghiệm.	0.5
3	Chứng minh : $\frac{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_6}+\sqrt{a_9}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}+\dots+\sqrt{a_9}} > 0,33$	3điểm
	Từ $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_9 \Rightarrow 0 < \sqrt{a_1} < \sqrt{a_2} < \sqrt{a_3} < \dots < \sqrt{a_9}$ (1)	0.5
	Từ (1) ta có : $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3} < 3\sqrt{a_3}; \sqrt{a_4}+\sqrt{a_5}+\sqrt{a_6} < 3\sqrt{a_6}; \sqrt{a_7}+\sqrt{a_8}+\sqrt{a_9} < 3\sqrt{a_9}$	1.5
	Cộng 3 bất đẳng thức cùng chiều trên ta được : $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\dots+\sqrt{a_9} < 3(\sqrt{a_3}+\sqrt{a_6}+\sqrt{a_9})$	0.5
	Suy ra : $\frac{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_6}+\sqrt{a_9}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}+\dots+\sqrt{a_9}} > \frac{1}{3} > 0,33.$	0.5

4	Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $\frac{a^2 - 2}{ab + 2}$ là số nguyên	3.5 điểm
	Nhận xét $a = 1$ không thỏa đề bài	0.5
	$a \geq 2: (a^2 - 2):(ab + 2) \Rightarrow b(a^2 - 2):(ab + 2) \Rightarrow [a(ab + 2) - 2(a + b)]:(ab + 2)$	1.0
	$\Rightarrow 2(a + b):(ab + 2) \Rightarrow 2(a + b) = k.(ab + 2), k \in \mathbb{N}^*$	0.5
	$k = 1: 2(a + b) = ab + 2 \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 2 \Leftrightarrow (a = 3; b = 4) \text{ hoặc } (a = 4; b = 3)$	0.5
	$k \geq 2: 2(a + b) = k.(ab + 2) \Rightarrow 2(a + b) \geq 2(ab + 2) \Rightarrow (a - 1)(b - 1) + 1 \leq 0$ không xảy ra	0.5
	Tóm lại: $(a = 3; b = 4)$ hoặc $(a = 4; b = 3)$	0.5
5	Chứng minh rằng: $\frac{S}{S'} = \left( \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2$	4.5 điểm
		
	Từ hệ thức $\frac{CN}{AC} = \frac{BN}{AB} \Rightarrow \frac{CN}{BN} = \frac{AC}{AB} = k$	0.5
	Do đó, $\frac{CB}{BN} = k + 1, \frac{CN}{BC} = \frac{k}{k + 1}$	0.5
	Dễ thấy $\triangle CPN \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{S_{CPN}}{S} = \left( \frac{CN}{CB} \right)^2 = \left( \frac{k}{k + 1} \right)^2$	1.0
	hay $S_{CPN} = \left( \frac{k}{k + 1} \right)^2 S$	
	Từ N kẻ $NQ \perp AB (Q \in AB)$ , ta có: $\frac{S_{MBN}}{S_{MBC}} = \frac{MB.NQ}{MB.CM} = \frac{NQ}{CM} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{k + 1}$	0.5
	Mặt khác, $\triangle APM = \triangle BMN$ (c.g.c) nên	1.0
	$\frac{S_{AMP} + S_{BMN}}{S} = \frac{1}{k + 1} \Rightarrow S_{AMP} + S_{BMN} = \frac{1}{k + 1} S$	
	Suy ra, $S' = S - \frac{1}{k + 1} S - \left( \frac{k}{k + 1} \right)^2 S = \frac{k}{(k + 1)^2} S$	0.5
	Do đó, $\frac{S}{S'} = \frac{(k + 1)^2}{k} = \left( \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2$	0.5

	Chứng minh luôn tồn tại ít nhất một cặp điểm mà khoảng cách giữa chúng $\leq \frac{a}{2}$	3 điểm
		
6	Vẽ ba đường trung bình của tam giác đều ABC, ta được 4 tam giác đều (hình vẽ). Khi đó, $MN = NK = KM = \frac{a}{2}$ (*)	0.5
	Khi ta lấy 5 điểm vào 4 tam giác vừa vẽ, thì ít nhất có một tam giác chứa không dưới hai điểm. Giả sử tam giác MNK chứa hai điểm E, F	0.5
	Mặt khác, trong tam giác đều MNK, khoảng cách giữa hai điểm không lớn hơn cạnh của nó. Thật vậy, giả sử $E \in MN$ , $F \in NK$ . Ta có : $NF \leq NK \quad (1)$ $EF < \max(MF, NF) \quad (2)$ $MF \leq MK = NK \quad (3)$	0.5
	Từ (1), (2) và (3) suy ra $EF \leq NK$ , dấu "=" xảy ra khi E, F trùng với hai đỉnh của $\Delta MNK$	0.5
	Do vậy, $EF \leq MN$ (**)	0.5
	Kết hợp (*) và (**) ta được $EF \leq \frac{a}{2}$ . Bài toán được chứng minh.	0.5

----- HẾT -----